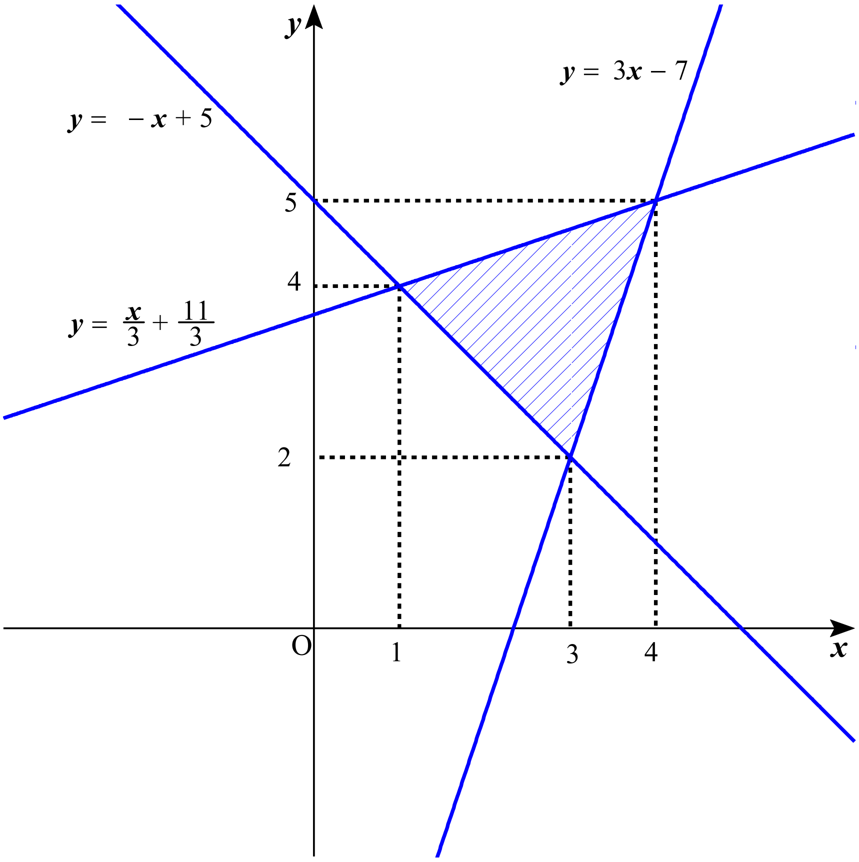
24 領域と最大・最小

203

$3y \leq x+11$ すなわち $y \leq \dfrac{x}{3}+\dfrac{11}{3}$，$x+y-5 \geq 0$ すなわち $y \geq -x+5$ および $y \geq 3x-7$ より，

領域 D は下図斜線部およびその境界線である。



$x^2+y^2-4y=k$ とおくと，$x^2+(y-2)^2=k+4$ ・・・①

条件より，点 $(x,\ y)$ は領域 D に含まれるから，

①は中心 $(0,\ 2)$，半径 $\sqrt{k+4}$ の円の領域 D の部分を表す。

よって，次ページ図より，$\sqrt{k+4}$ が最大となるのは①が点 $(4,\ 5)$ を通るときで，最小となるのは①が $x+y-5=0$ と接するときである。

①が点 $(4,\ 5)$ を通るとき

$4^2+(5-2)^2=k+4$ より，$k=21$

①が $x+y-5=0$ と接するとき

$x+y-5=0$ より，$y=-x+5$

これを $x^2+(y-2)^2=k+4$ に代入し，x について整理すると，$2x^2-6x-k+5=0$

この方程式の解は重解だから，判別式を D とすると，$D=0$

これと，$\dfrac{D}{4}=9+2k-10=2k-1$ より，$2k-1=0 \quad \therefore k=\dfrac{1}{2}$

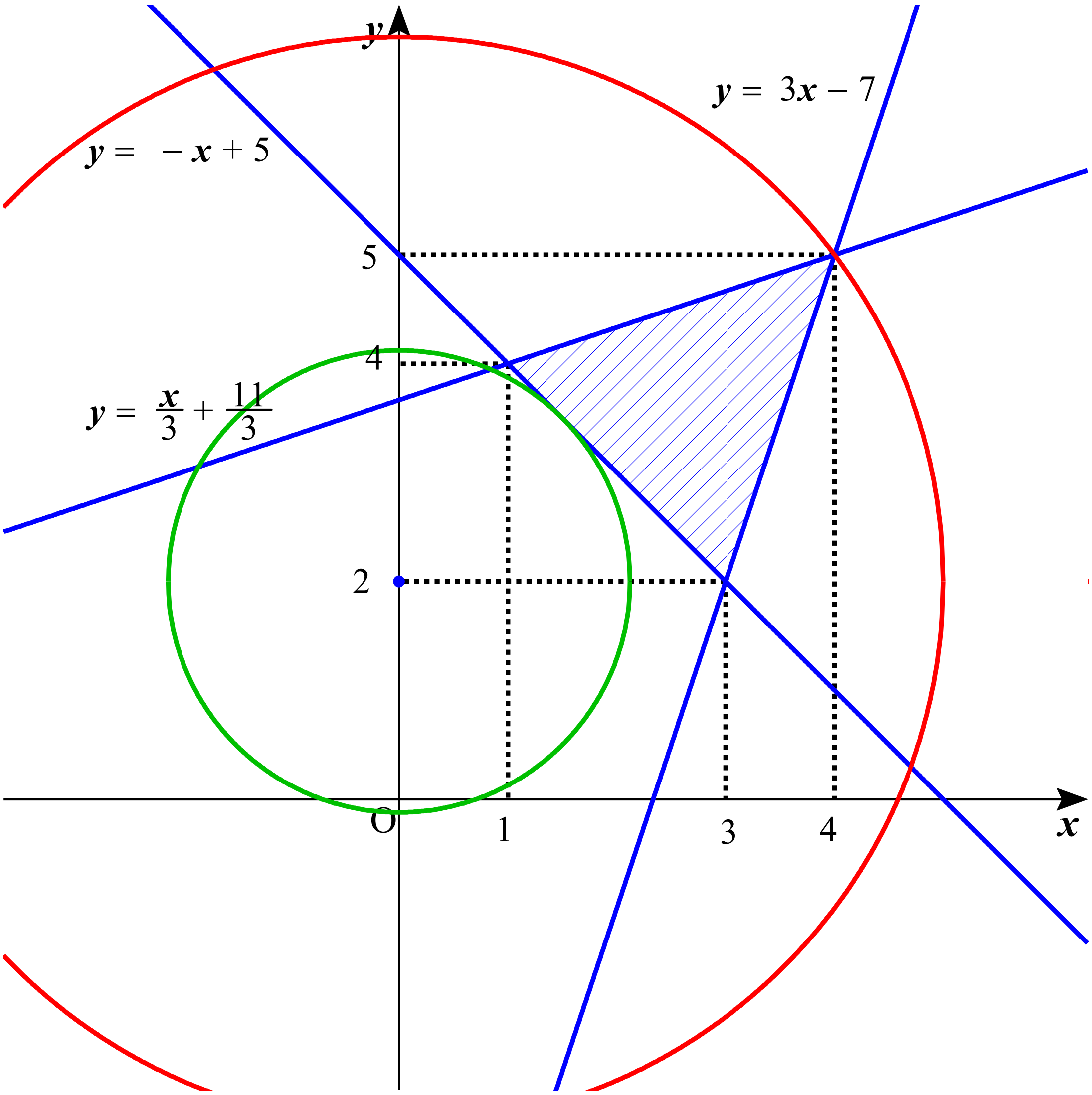
また，重解を α とすると，解と係数の関係より，$2\alpha=3 \quad \therefore \alpha=\dfrac{3}{2}$

よって，接点の座標は $(x,\ y)=(x,\ -x+5)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

ゆえに，$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$ のとき $k=\dfrac{1}{2}$

以上より，

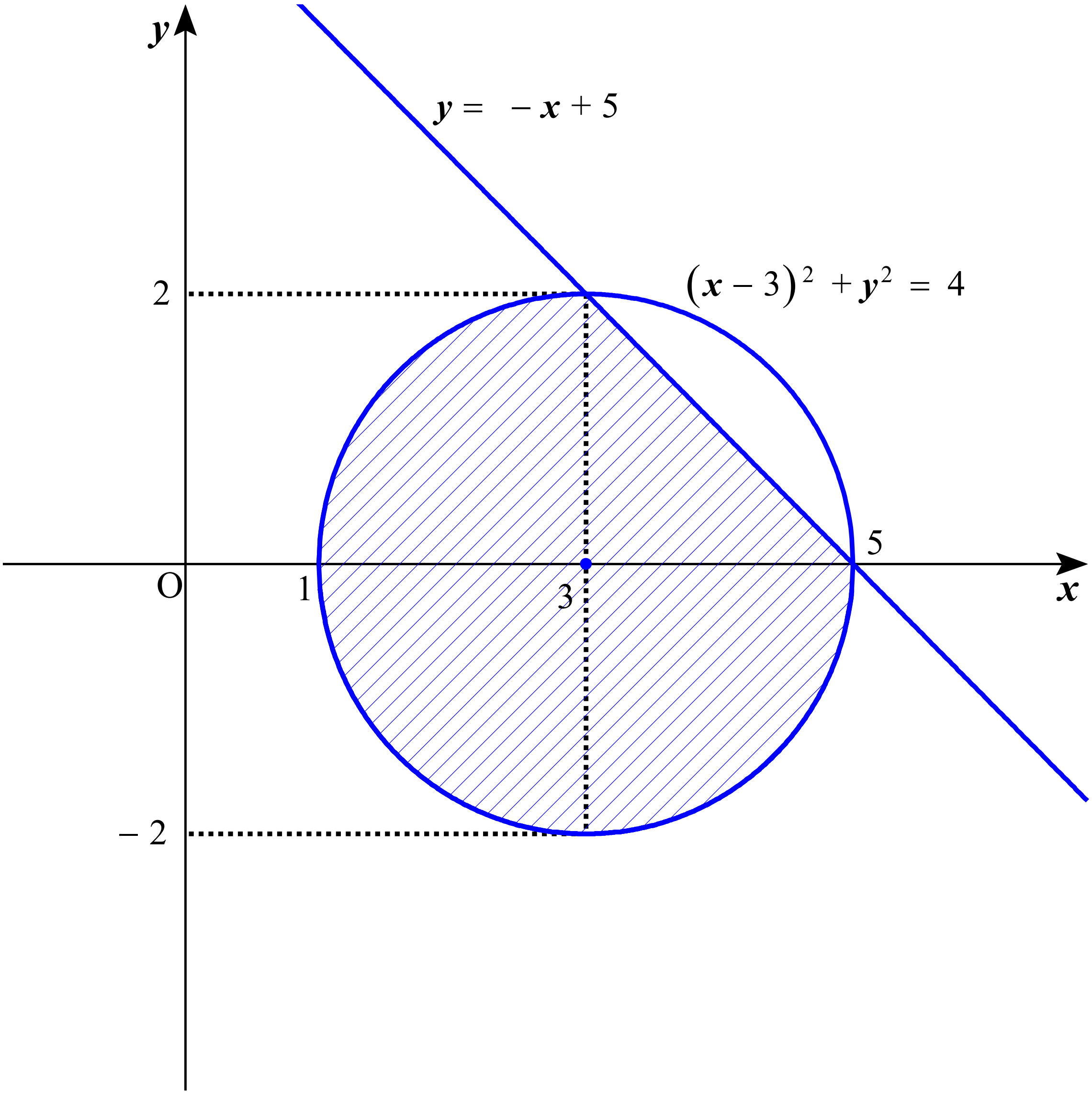
x^2+y^2-4y は，$(x,\ y)=(4,\ 5)$ で最大値 21，$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$ で最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。



204

$\begin{cases} x^2-6x+y^2+5\leq 0 \\ x+y+5\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+y^2\leq 4 \\ y\leq -x+5 \end{cases}$ より，

領域 D は下図斜線部およびその境界線である。



$x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ は，$(x-a)^2+(y-1)^2=1$ と変形できるから，

中心 $(a,\ 1)$，半径 1 の円である。この円を C とすると，上図より，

a が最大値をとるのは，円 C が領域 D の $3\leq x\leq 5$ において $y=-x+5$ と接するときで，

a が最小値をとるのは，円 C が領域 D の $x\leq 3$ の部分で円 $(x-3)^2+y^2=4$ と外接するときである。

円 C が領域 D の $3\leq x\leq 5$ において $y=-x+5$ と接するとき

　円 C の中心 $(a,\ 1)$ と直線 $y=-x+5$ すなわち $x+y-5=0$ の距離が 1 となるから，

$\dfrac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$ より，$|a-4|=\sqrt{2}$　$\therefore a=4\pm\sqrt{2}$

これと，$a>3$ より，$a=4+\sqrt{2}$

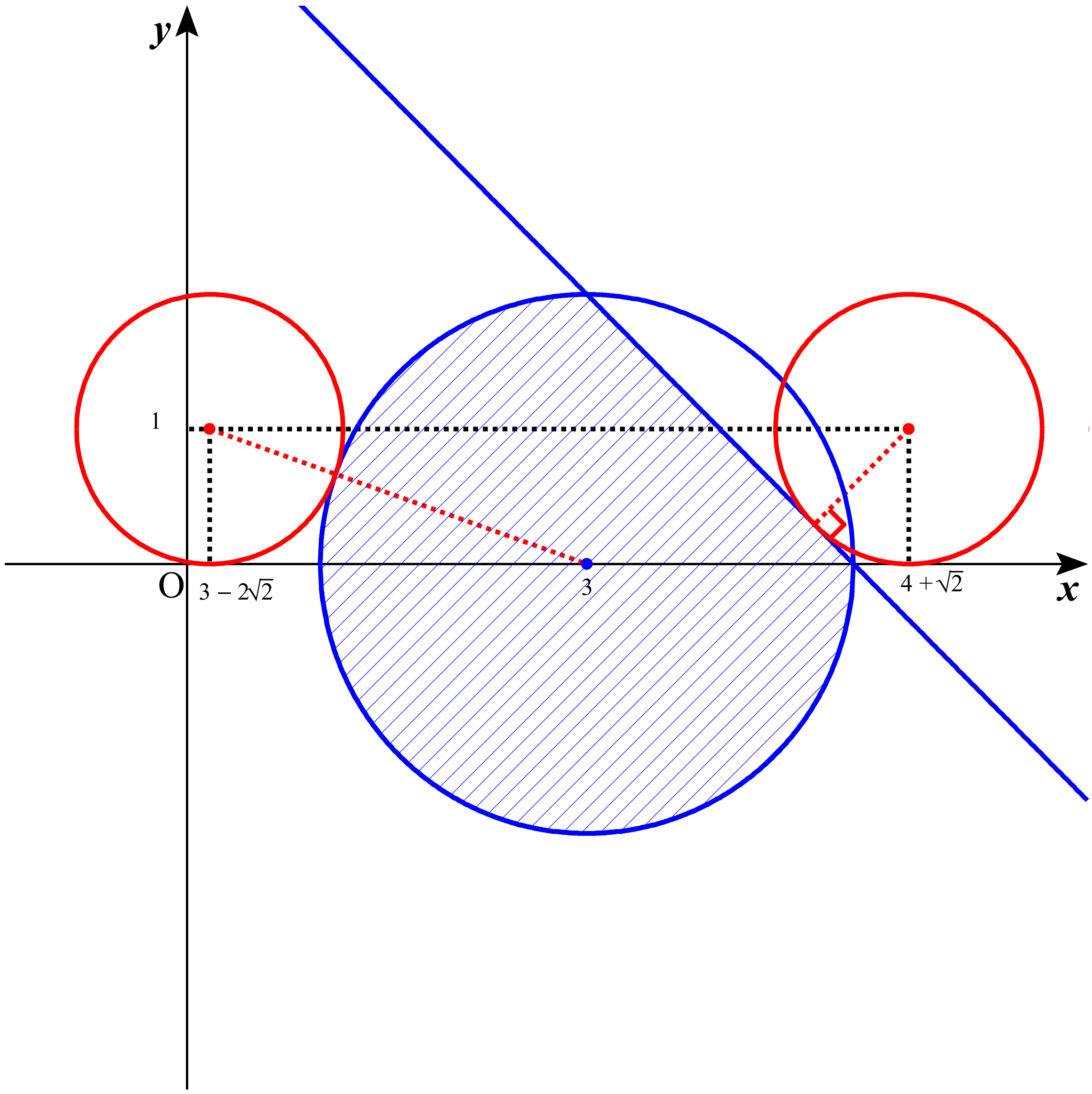
円 C が領域 D の $x\leq 3$ の部分で円 $(x-3)^2+y^2=4$ と外接するとき

2 円の中心間の距離が 2 円の半径の和と等しいから，$\sqrt{(a-3)^2+(1-0)^2}=1+2$

両辺を 2 乗すると，$(a-3)^2+1=9$　$\therefore a=3\pm 2\sqrt{2}$

これと，$a<3$ より，$a=3-2\sqrt{2}$

よって，a の最大値と最小値は，それぞれ $4+\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2}$



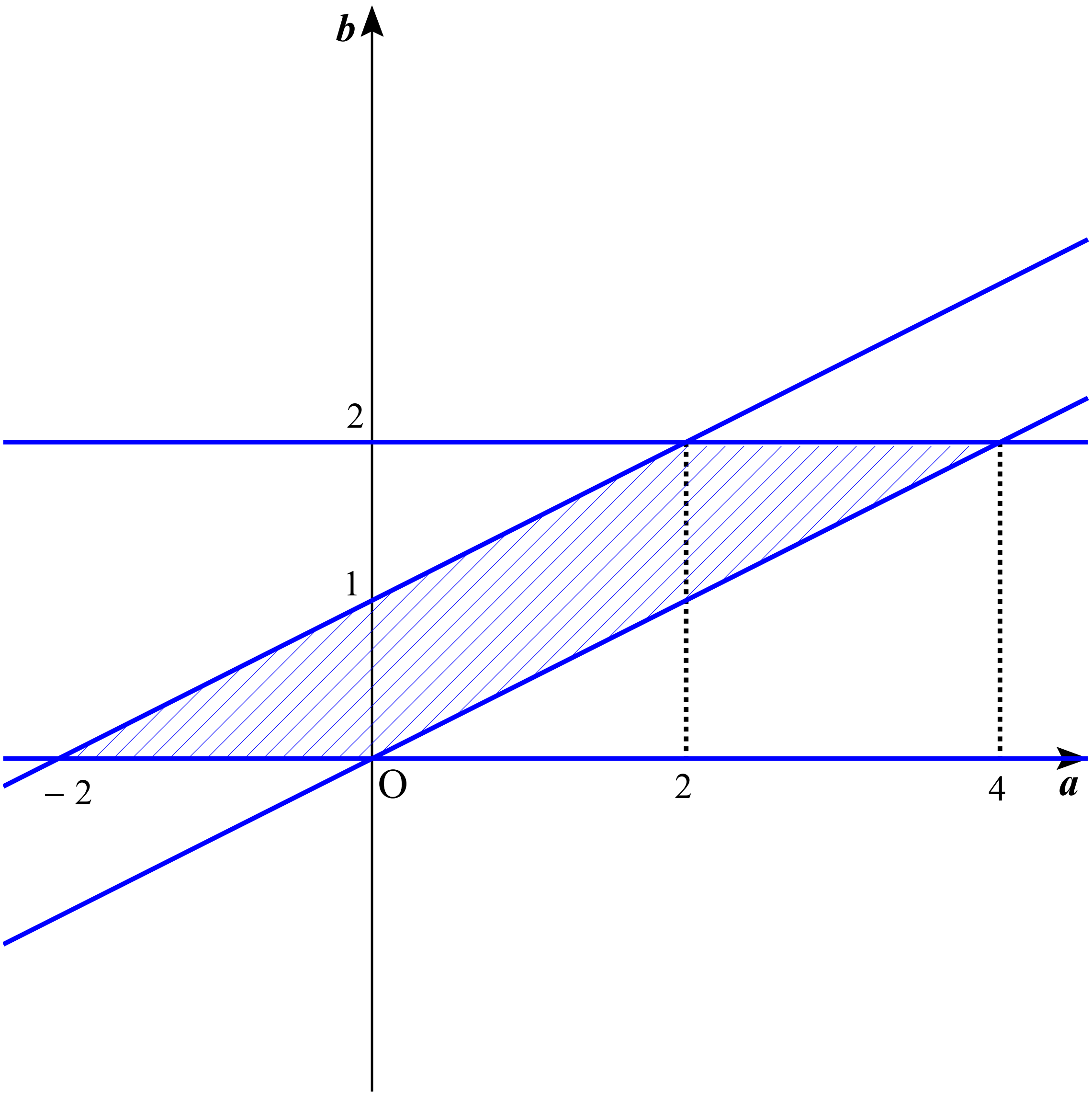
205

(1)

$f(0)=4b$ および $0 \leq f(0) \leq 8$ より，$0 \leq 4b \leq 8$　$\therefore 0 \leq b \leq 2$　・・・①

$f(1)=1-2a+4b$ および $1 \leq f(1) < 5$ より，$1 \leq 1-2a+4b < 5$　$\therefore \dfrac{a}{2} \leq b \leq \dfrac{a}{2}+1$　・・・②

①かつ②より，$(a,\ b)$ の存在範囲は下図の斜線部およびその境界線である。



(2)

$f(x)=(x-a)^2-a^2+4b$ より，$m=-a^2+4b$　$\therefore b=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{m}{4}$　・・・③

③は軸を $a=0$ とする下に凸の放物線だから，

m が最大値をとるのは②が $b=\dfrac{a}{2}+1$ と接するときである。

このとき $\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{m}{4}=\dfrac{a}{2}+1$ すなわち $\dfrac{1}{4}\left(a^2-2a+m-4\right)=0$ より，

a の 2 次方程式 $a^2-2a+m-4=0$　・・・④　は重解をもつ。

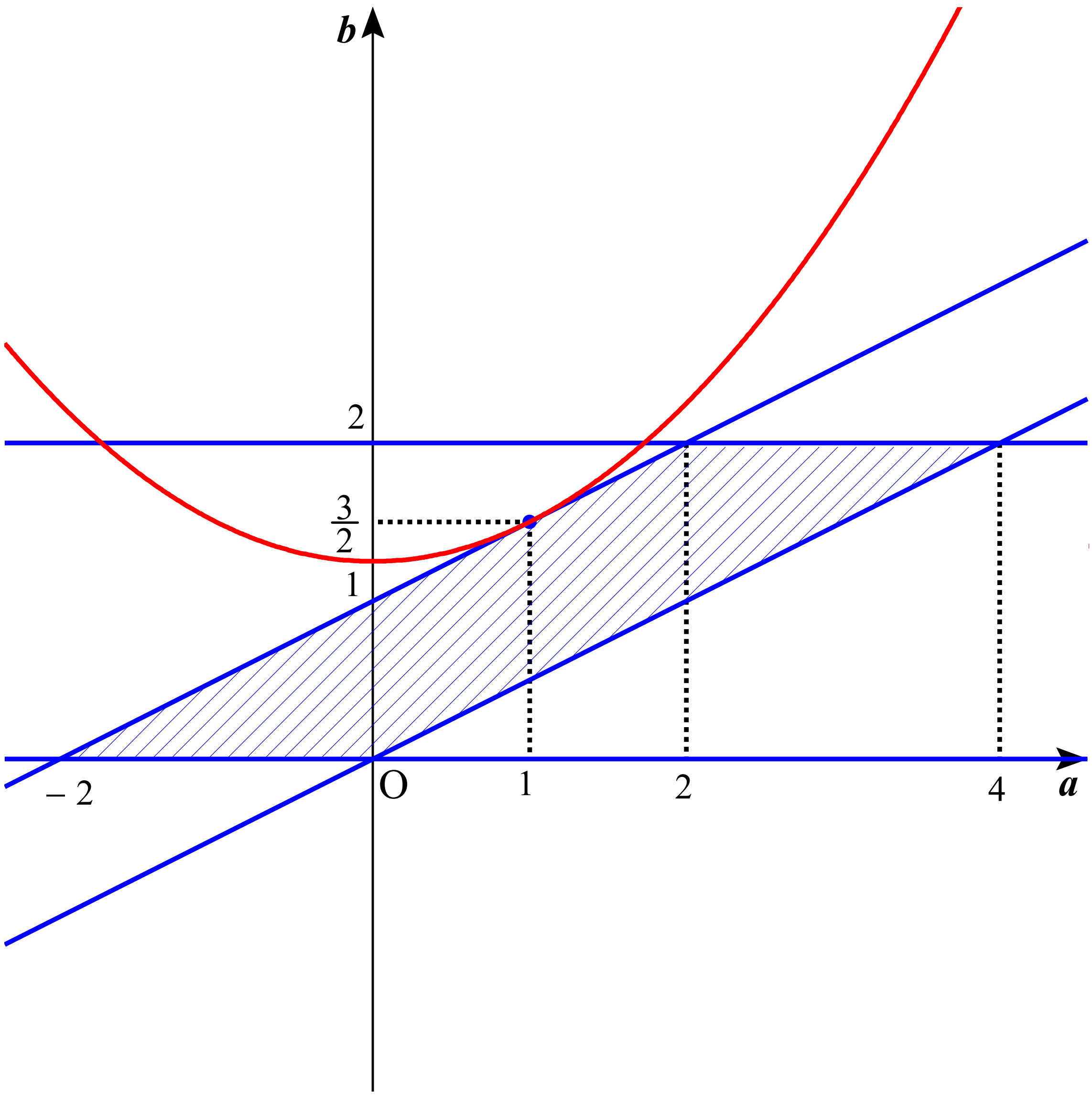
したがって，判別式を D とすると $D=0$

これと，$\dfrac{D}{4}=1-m+4=5-m$ より，$5-m=0$　$\therefore m=5$　・・・⑤

⑤を③に代入し，整理すると，$(a-1)^2=0$　$\therefore a=1$　・・・⑥

⑤と⑥を③に代入し，b を求めると，$b=\dfrac{3}{2}$　・・・⑦

⑤～⑦より，$(a,\ b)=\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ で m は最大値 5 をとる。



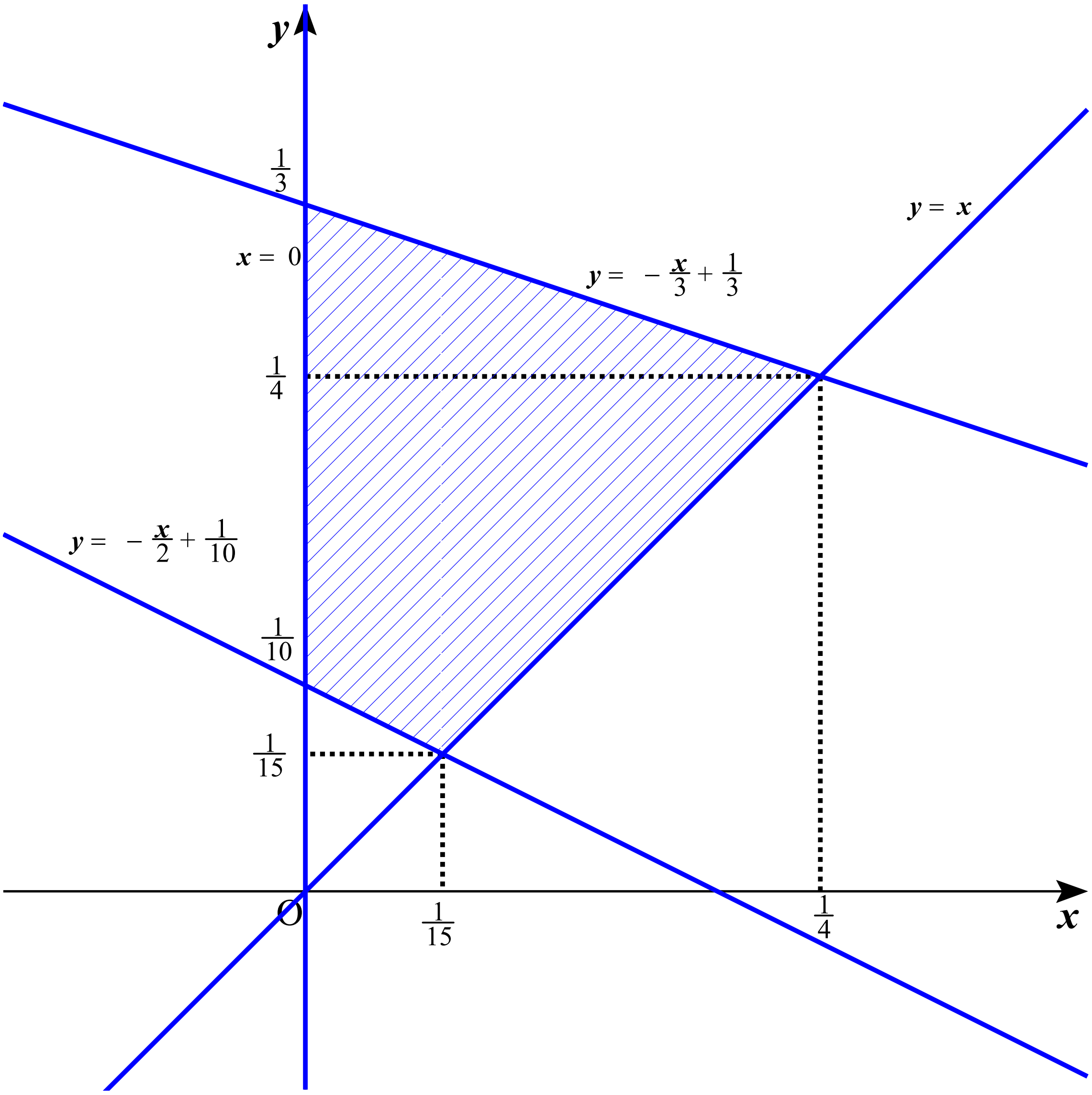
206

$z=-x-2y+1$ より，$0\leq x\leq y\leq -x-2y+1\leq \dfrac{4}{5}$

よって，$\begin{cases} 0\leq x \\ x\leq y \\ y\leq -x-2y+1 \\ -x-2y+1\leq \dfrac{4}{5} \end{cases}$ 　すなわち $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq x \\ y\leq -\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3} \\ y\geq -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{10} \end{cases}$ が満たす領域における

y の最大値と最小値を求めればよく，その領域は下図斜線部およびその境界線である。

よって，y の最大値，最小値は，それぞれ $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{15}$



207

(1)

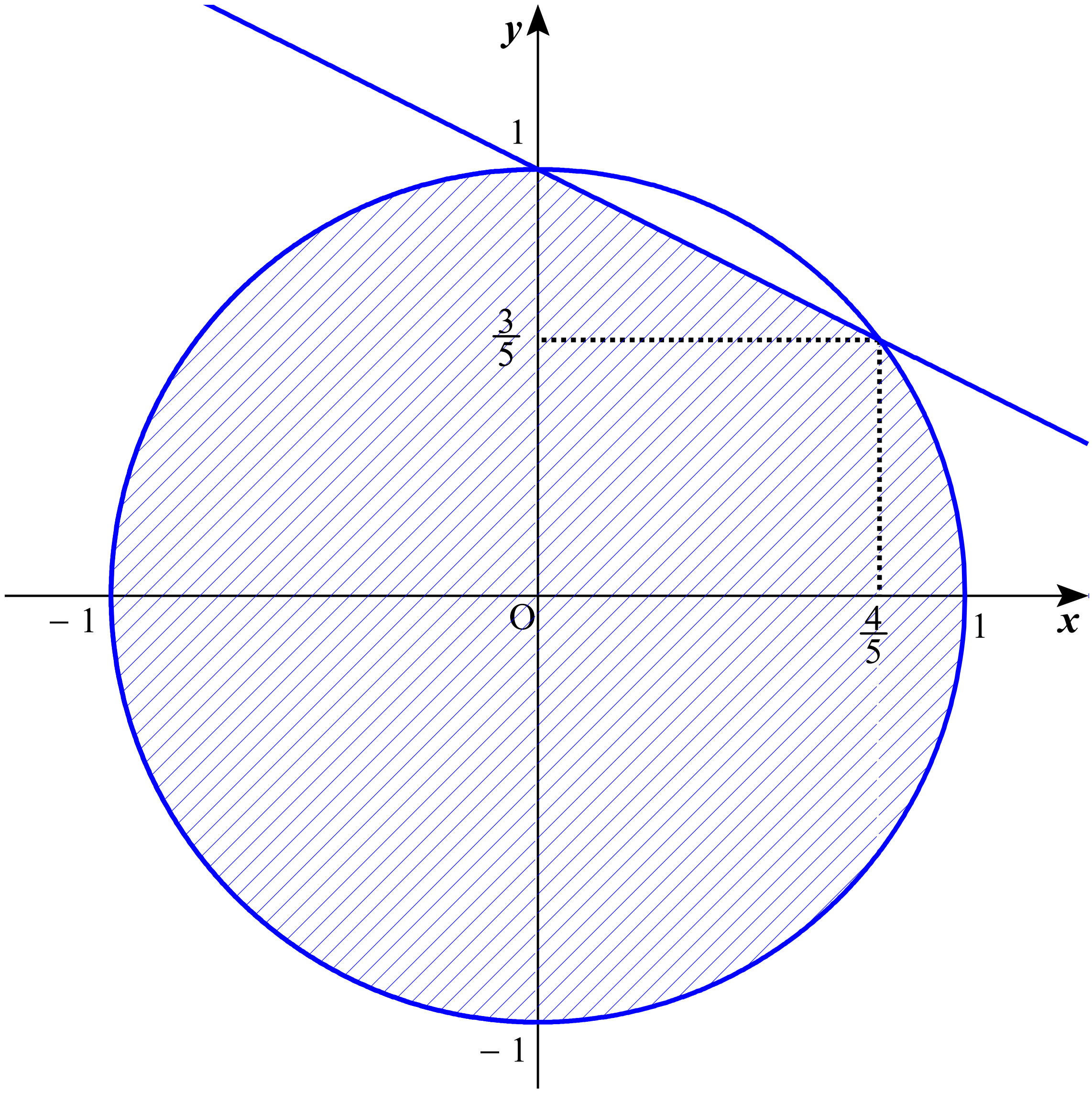
円と直線の共有点

$x^2+y^2=1$ に $x=-2y+2$ を代入し，y について整理すると，$5y^2-8y+3=0$

よって，$(y-1)(5y-3)=0$ より，$y=1,\ \dfrac{3}{5}$

これと，$x=-2y+2$ より，共有点の座標は $(0,\ 1),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

よって，領域 D は下図斜線部およびその境界線である。



(2)

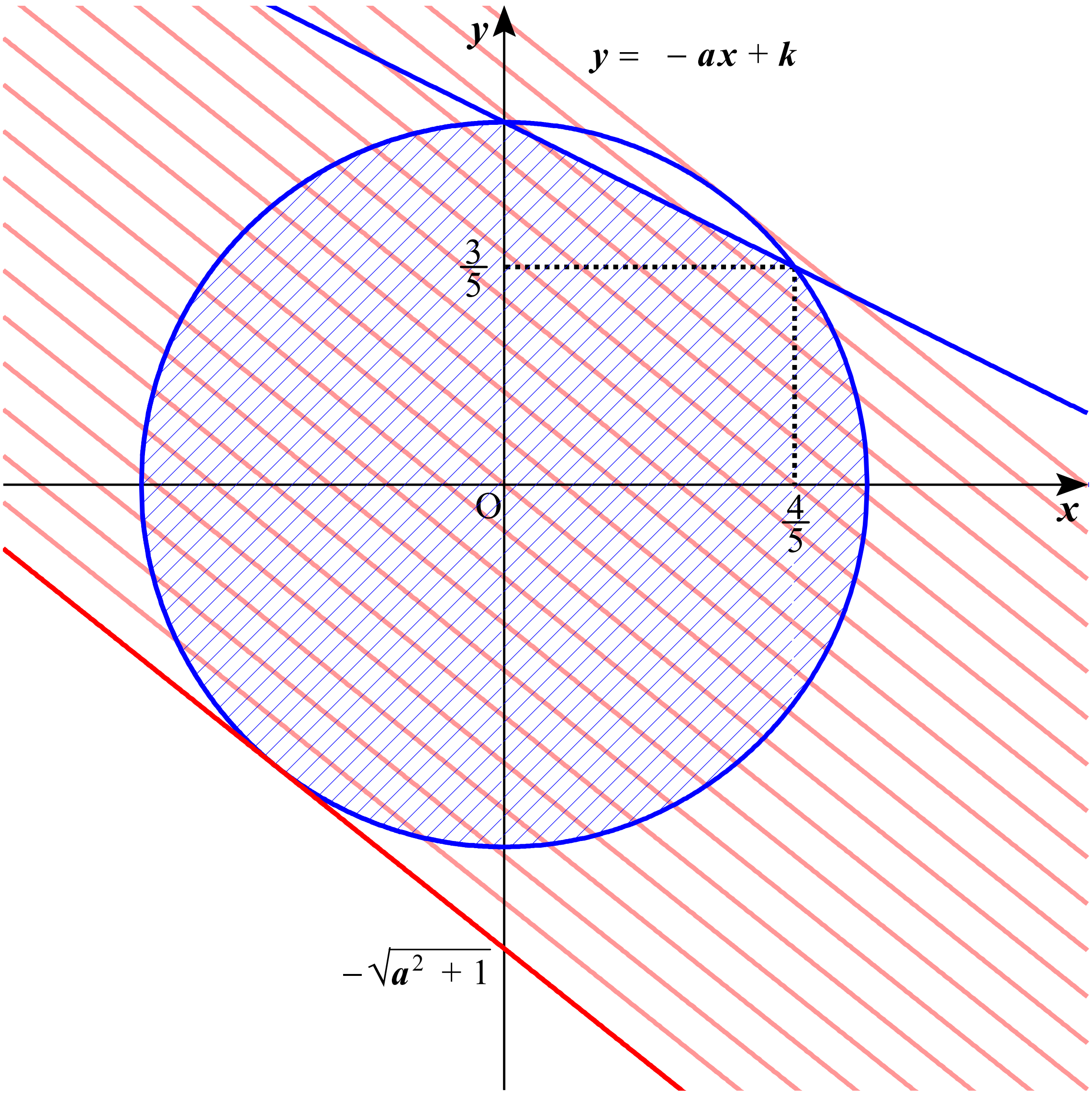
$ax+y=k$ とおくと，$y=-ax+k$

よって，$y=-ax+k$ が $x^2+y^2=1\ (x<0)$ と接するとき切片 k の値が最小となる。

このとき，$y=-ax+k$ すなわち $ax+y-k=0$ と円の中心 $(0,0)$ の距離が 1 となるから，

$\dfrac{|a\cdot 0+0-k|}{\sqrt{a^2+1^2}}=1$ より，$|k|=\sqrt{a^2+1}$

これと $k<0$ より，最小値は $-\sqrt{a^2+1}$



(3)

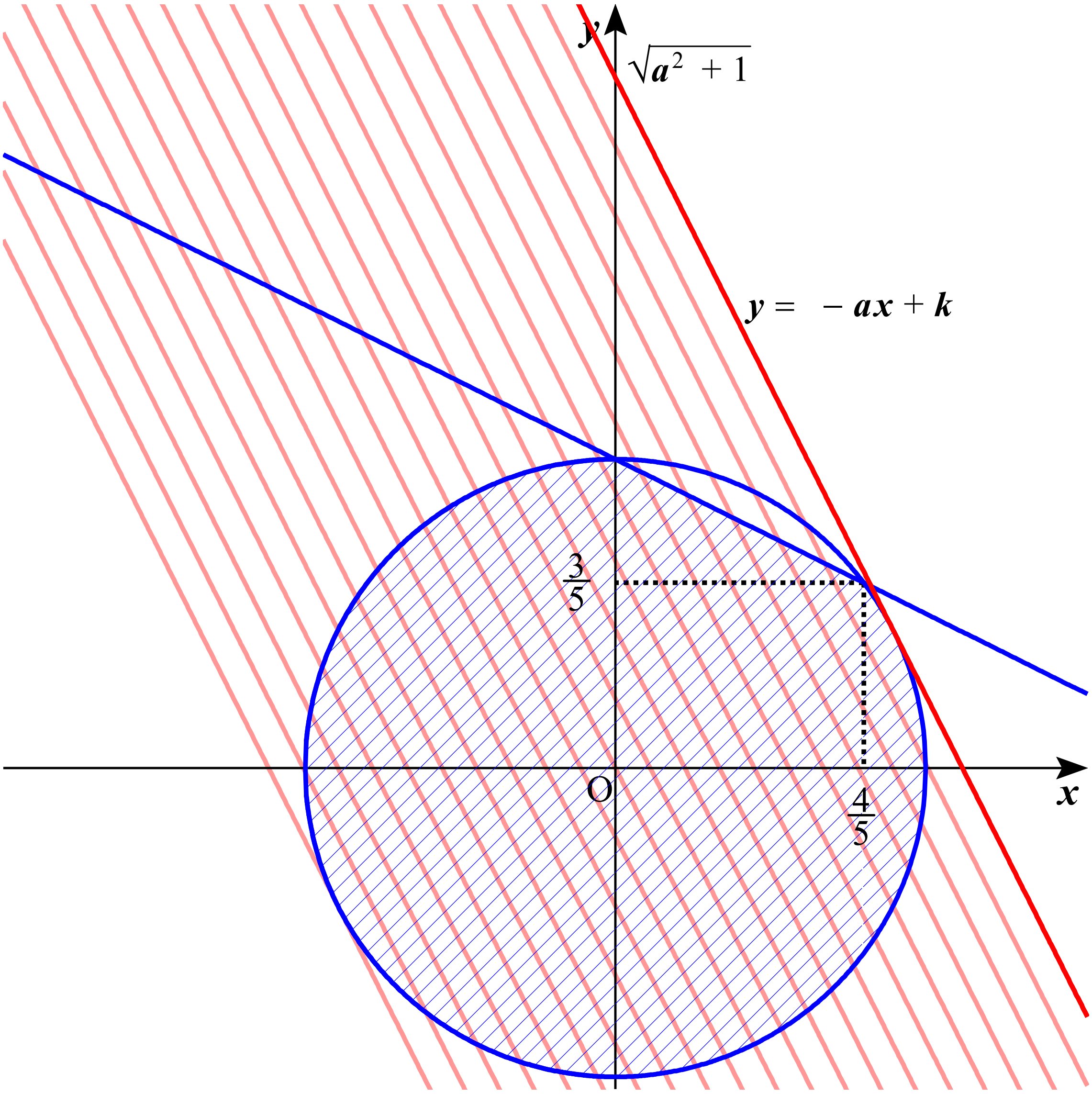
$y=-ax+k$ が $x^2+y^2=1\ (x>0)$ と接するときと接しないときで場合分けする。

$y=-ax+k$ が $x^2+y^2=1\ (x>0)$ と接するとき

傾きが負でないか $x^2+y^2=1$ の $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ における接線の傾き $-\frac{4}{3}$ より小さいときだから，

$-a\geq 0$ または $-a\leq -\frac{4}{3}$ より， $a\leq 0$ または $a\geq\frac{4}{3}$ のときである。

このとき，(2)と同様にして， k の最大値は $k>0$ より， $\sqrt{a^2+1}$



$y=-ax+k$ が $x^2+y^2=1\ (x>0)$ と接しないとき

$y=-ax+k\left(0<a<\dfrac{4}{3}\right)$ が点 $(0,\,1)$ または点 $\left(\dfrac{4}{5},\,\dfrac{3}{5}\right)$ を通るとき k は最大となる。

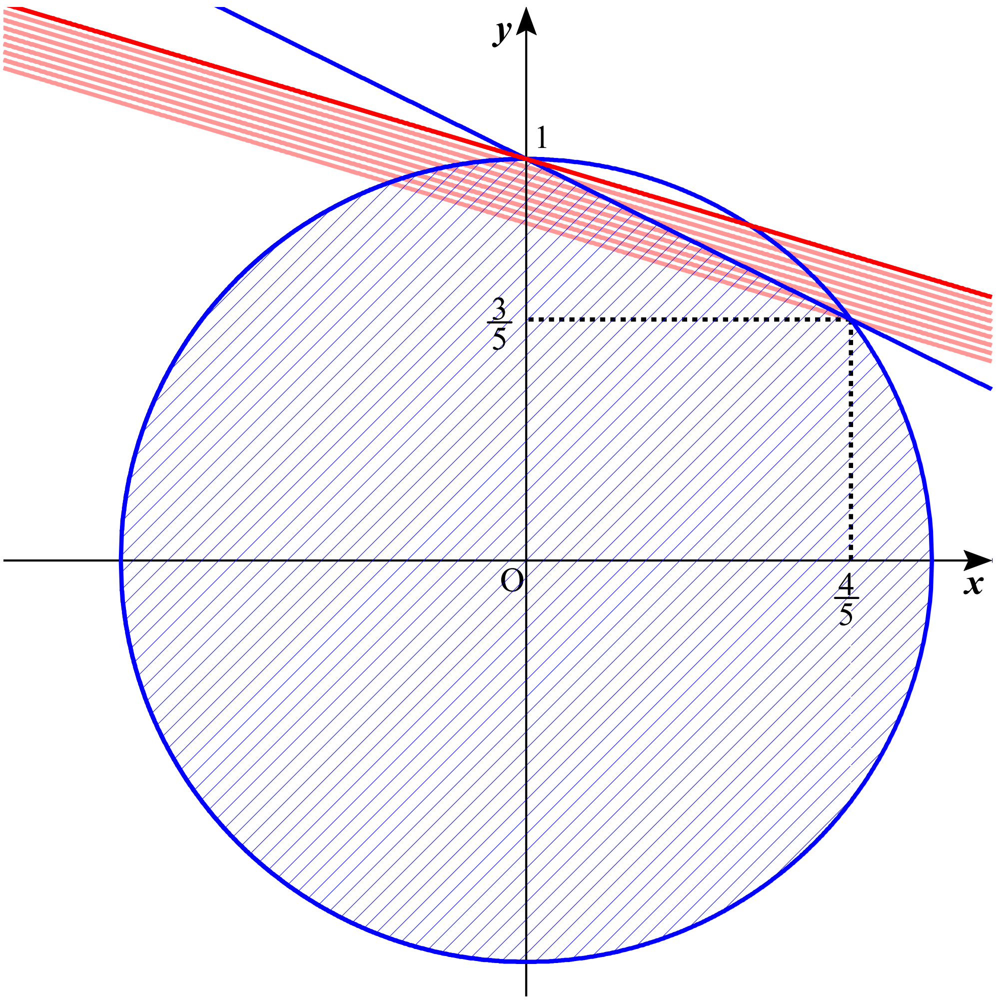
点 $(0,\,1)$ を通るのは傾き $-a$ が $x+2y-2=0$ の傾きである $-\dfrac{1}{2}$ 以上で 0 より小さいとき

すなわち $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のときで，このとき k は最大値 1 をとる。

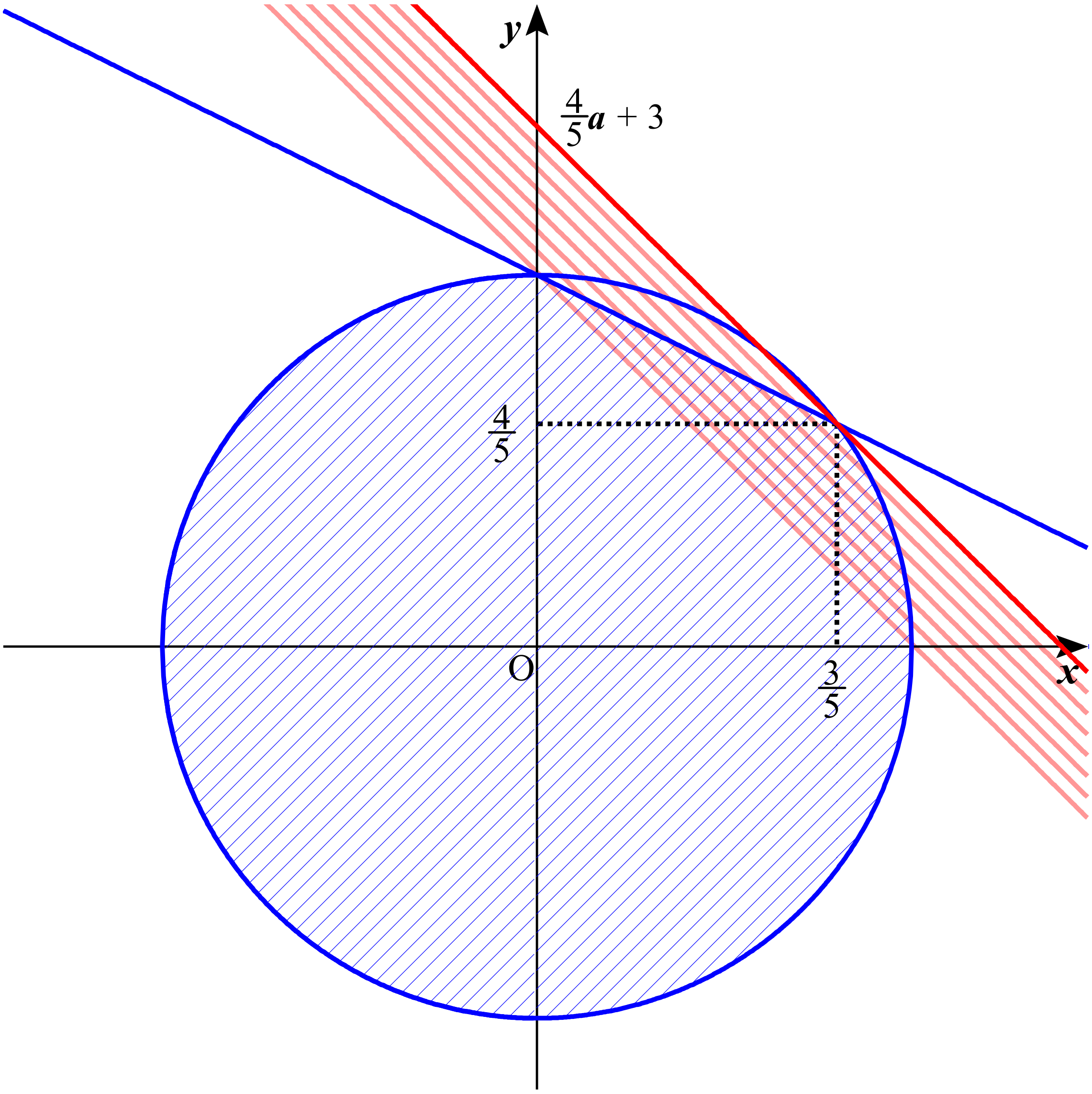
点 $\left(\dfrac{4}{5},\,\dfrac{3}{5}\right)$ を通るのは，同様にして，$\dfrac{1}{2}\leqq a<\dfrac{4}{3}$ のときで，

このとき，$\dfrac{3}{5}=-a\cdot\dfrac{4}{5}+k$ より，k は最大値 $\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}$ をとる。

$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$\frac{1}{2} \leq a < \frac{4}{3}$ のとき



以上より，

最大値は

$a \leq 0$ または $a \geq \frac{4}{3}$ のとき：$\sqrt{a^2+1}$

$0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき：1

$\frac{1}{2} < a < \frac{4}{3}$ のとき：$\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}$

208

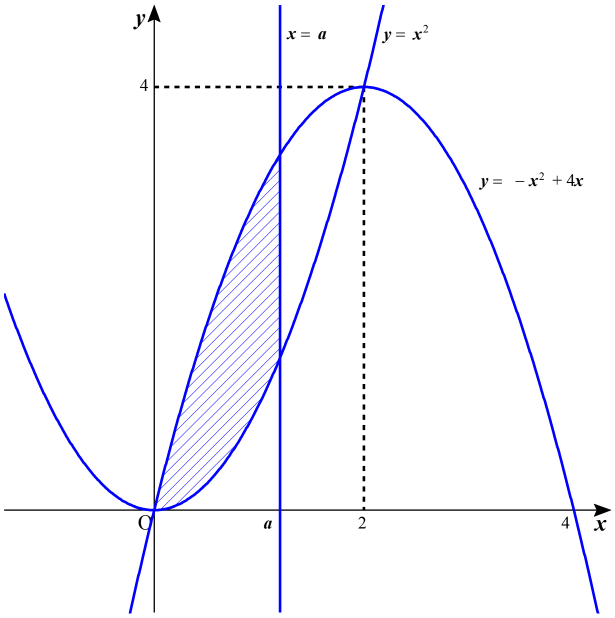
(1)

$y=x^2$ と $y=-x^2+4x$ の共有点の座標と領域 D の図示

$x^2=-x^2+4x$ より，$2x(x-2)=0$　$\therefore x=0,\ 2$

よって，共有点の座標は $(x,\ y)=(x,\ x^2)=(0,\ 0),\ (2,\ 4)$

これと $0<a<2$ より，領域 D は下図斜線部およびその境界線である。



$y-x=k$ とおくと，$y=x+k$ より，k は傾き 1 の直線の切片を表す。

したがって，$M(a)$ とは $y=x+k$ が領域 D 上を通るときの k の最大値のことであり，

図から，$y=x+k$ が $y=-x^2+4x\ (0\leq x\leq a)$ と共有点をもつときの k の最大値を調べればよい。

このとき $x+k=-x^2+4x\ (0\leq x\leq a)$ より，$k=-x^2+3x=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\ (0\leq x\leq a)$

よって，k の最大値は，$0<a<\dfrac{3}{2}$ のとき $x=a$ で $-a^2+3a$，$\dfrac{3}{2}\leq a<2$ のとき $\dfrac{9}{4}$ となる。

ゆえに，$M(a)=\begin{cases}-a^2+3a & \left(0<a<\dfrac{3}{2}\right)\\[2mm] \dfrac{9}{4} & \left(\dfrac{3}{2}\leq a<2\right)\end{cases}$

(2)

(1)と同様にして，$y=x+k$ が $y=x^2\ (0\leq x\leq a)$ と共有点をもつときの k の最小値を調べると，

$x+k=x^2\ (0\leq x\leq a)$ より，$k=x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\ (0\leq x\leq a)$

よって，k の最小値は，$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき $x=a$ で a^2-a，$\dfrac{1}{2}\leq a<1$ のとき $-\dfrac{1}{4}$ となる。

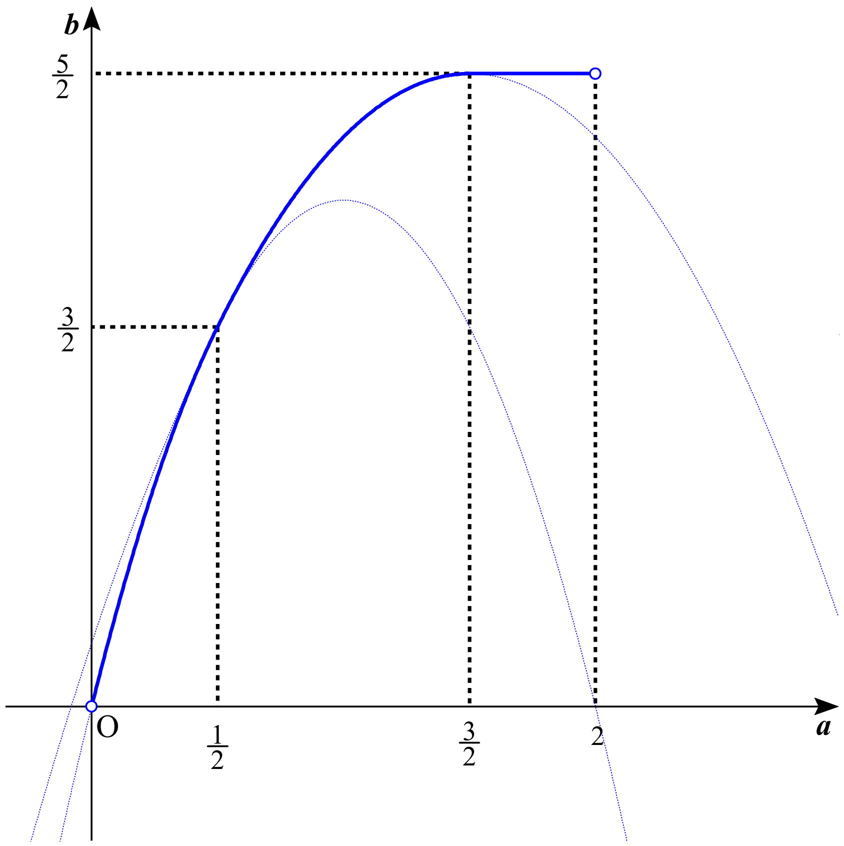
ゆえに，$m(a)=\begin{cases} a^2-a & \left(0<a<\dfrac{1}{2}\right) \\ -\dfrac{1}{4} & \left(\dfrac{1}{2}\leq a<2\right) \end{cases}$

(3)

$$(M(a),\ m(a))=\begin{cases} \left(-a^2+3a,\ a^2-a\right) & \left(0<a<\dfrac{1}{2}\right) \\ \left(-a^2+3a,\ -\dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{1}{2}\leq a<\dfrac{3}{2}\right) \\ \left(\dfrac{9}{4},\ -\dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{3}{2}\leq a<1\right) \end{cases}$$

より，$b=f(a)=M(a)-m(a)=\begin{cases} -2a^2+4a & \left(0<a<\dfrac{1}{2}\right) \\ -a^2+3a+\dfrac{1}{4} & \left(\dfrac{1}{2}\leq a<\dfrac{3}{2}\right) \\ \dfrac{5}{2} & \left(\dfrac{3}{2}\leq a<1\right) \end{cases}$

これを図示すると下図実線となる。



209

(1)

解法 1

座標平面を xy 座標平面とする。

$s=1$ とすると，$B(1,\ 1)$ より，直線 AB は y 軸と平行である。

3 点が一直線上に並ぶから，このとき $C(t,\ t^2)$ は $(1,\ 1)$ となる。

これは $s<t$ を満たさないから不適である。

また，$t=1$ としても同様に不適となる。

よって，$s,\ t$ は 1 でない。

直線 AB の傾きは，$s\neq 1$ より，$\dfrac{s^2-2}{s-1}$

直線 BC の傾きは，$t\neq s$ より，$\dfrac{t^2-s^2}{t-s}=\dfrac{(t+s)(t-s)}{t-s}=t+s$

直線 AB の傾きと直線 BC の傾きが等しいから，$\dfrac{s^2-2}{s-1}=t+s$

この両辺に $s-1$ を掛けた式を整理することにより，s と t の関係式は，$st-s-t+2=0$

解法 2

$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} t-s \\ t^2-s^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t-s \\ (t-s)(t+s) \end{pmatrix}=(t-s)\begin{pmatrix} 1 \\ t+s \end{pmatrix}$

これと $t\neq s$ より，$\overrightarrow{BC}$ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ t+s \end{pmatrix}$

したがって，3 点を通る直線は，$(1,\ 2)$ を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ t+s \end{pmatrix}$ の直線である。

よって，その方程式は $x-1=\dfrac{y-2}{t+s}$

直線は点 $C(t,\ t^2)$ を通るから，$t-1=\dfrac{t^2-2}{t+s}$

この両辺に $t+s$ を掛けた式を整理することにより，s と t の関係式は，$st-s-t+2=0$

(2)

$(u,\ v)=\left(\dfrac{s+t}{2},\ \dfrac{s^2+t^2}{2}\right)=\left(\dfrac{s+t}{2},\ \dfrac{(s+t)^2-2st}{2}\right)$ より，

$s+t=2u$　・・・①　$(s+t)^2-2st=2v$　・・・②

また，(1)より，$st=(s+t)-2$　・・・③

①を②，③にそれぞれ代入すると，$4u^2-2st=2v$　・・・④　$st=2u-2$　・・・⑤

⑤を④に代入し，整理すると，$2v=4u^2-4u+4$

両辺を 2 で割ることにより，$v=2u^2-2u+2$

(3)

$v=2u^2-2u+2$

$=2\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

$u=\dfrac{1}{2}$とすると，①より，$s+t=1$　・・・⑥

⑥を③に代入すると，$st=-1$　・・・⑦

⑥，⑦より，$s,\ t$は2次方程式$p^2-p-1=0$の解である。

これと$s<t$より，$(s,\ t)=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

よって，$u=\dfrac{1}{2}$かつ$s<t$を満たす実数$s,\ t$すなわち$(s,\ t)=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$が存在する。

ゆえに，$u=\dfrac{1}{2}$，$(s,\ t)=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$のとき，$v$は最小値$\dfrac{3}{2}$をとる。

210

(1)

セットA，セットBの購入数をそれぞれ$m,\ n$（$m,\ n$は負でない整数）とすると，

乗車券が100枚であることから，$7m+3n=100$　・・・①

$0\leq 7m\leq 100$より，$0\leq m\leq 14$　・・・②

①より，$n=\dfrac{100-7m}{3}=33-\dfrac{7m-1}{3}$　・・・③

nは整数だから，$7m-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$

これと，$6m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$より，$(7m-1)-6m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$　すなわち$m-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$

よって，$m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$

したがって，②より，$m=1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13$

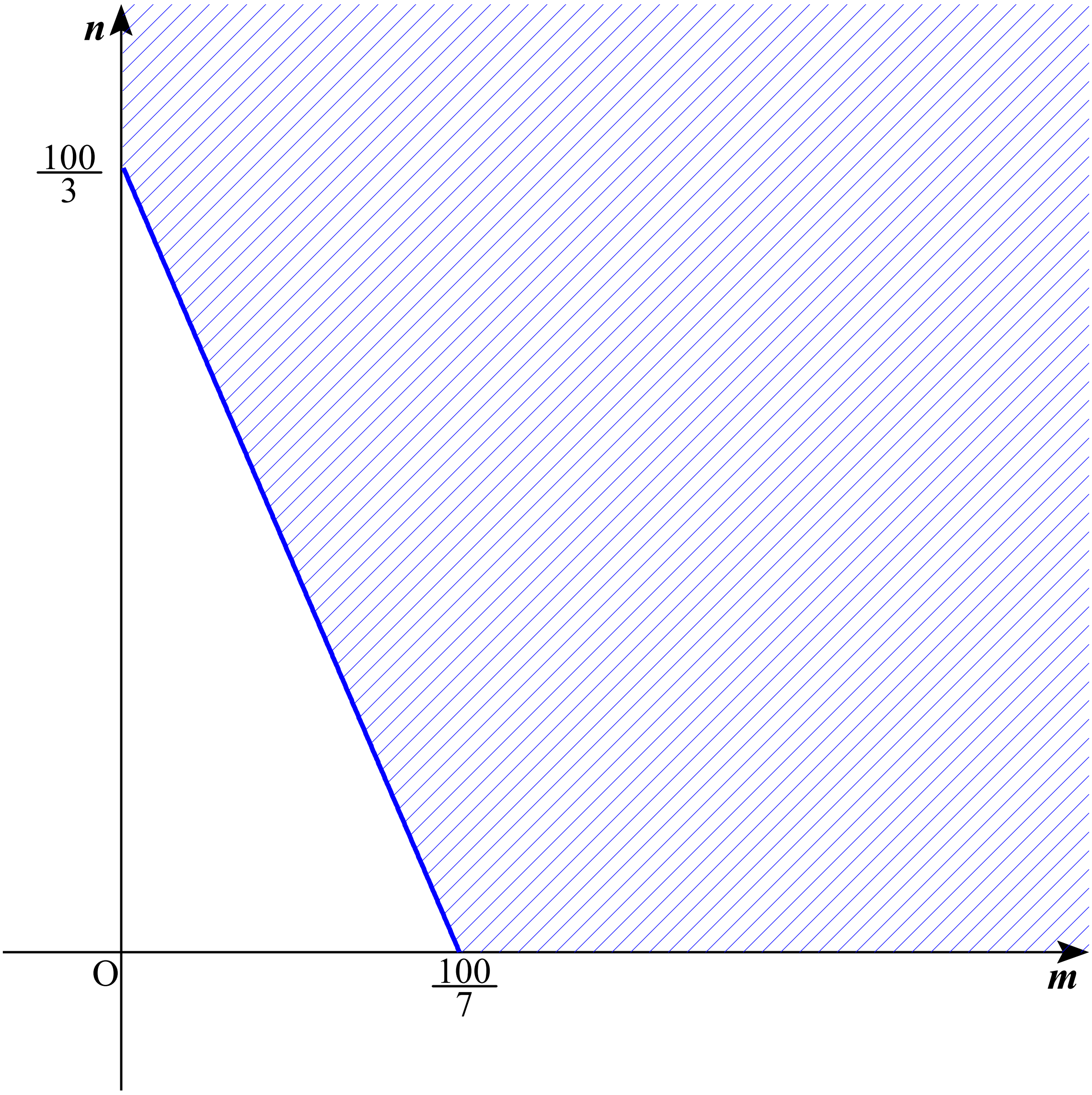
これと，③より，$(m,\ n)=(1,\ 31),\ (4,\ 24),\ (7,\ 17),\ (10,\ 10),\ (13,\ 3)$

(2)

乗車券が100枚以上だから，$7m+3n\geq 100$　$\therefore n\geq -\dfrac{7}{3}m+\dfrac{100}{3}$　・・・④

購入金額をkとすると，$480m+220n=k$より，$n=-\dfrac{24}{11}m+\dfrac{k}{220}$　・・・⑤

④を満たす$(m,\ n)$（$m,\ n$は負でない整数）は，次図斜線部およびその境界線の格子点である。



(1)より，$(m,\ n)=(13,\ 3)$は$n=-\frac{7}{3}m+\frac{100}{3}$上の格子点である。

そこで，⑤が点$(13,\ 3)$を通るときのkの値を求めると，$3=-\frac{24}{11}\cdot 13+\frac{k}{220}$より，

$k=6900$　・・・⑥

よって，このとき⑤は$n=-\frac{24}{11}m+\frac{345}{11}$　・・・⑦となり，

これを加えると次ページ図のようになる。
したがって，$(m,\ n)=(13,\ 3)$の購入金額以下になるのは,

斜線部と⑦に囲まれた領域の格子点であり，⑦とm軸の共有点が$\frac{115}{8}=14+\frac{3}{8}$であること

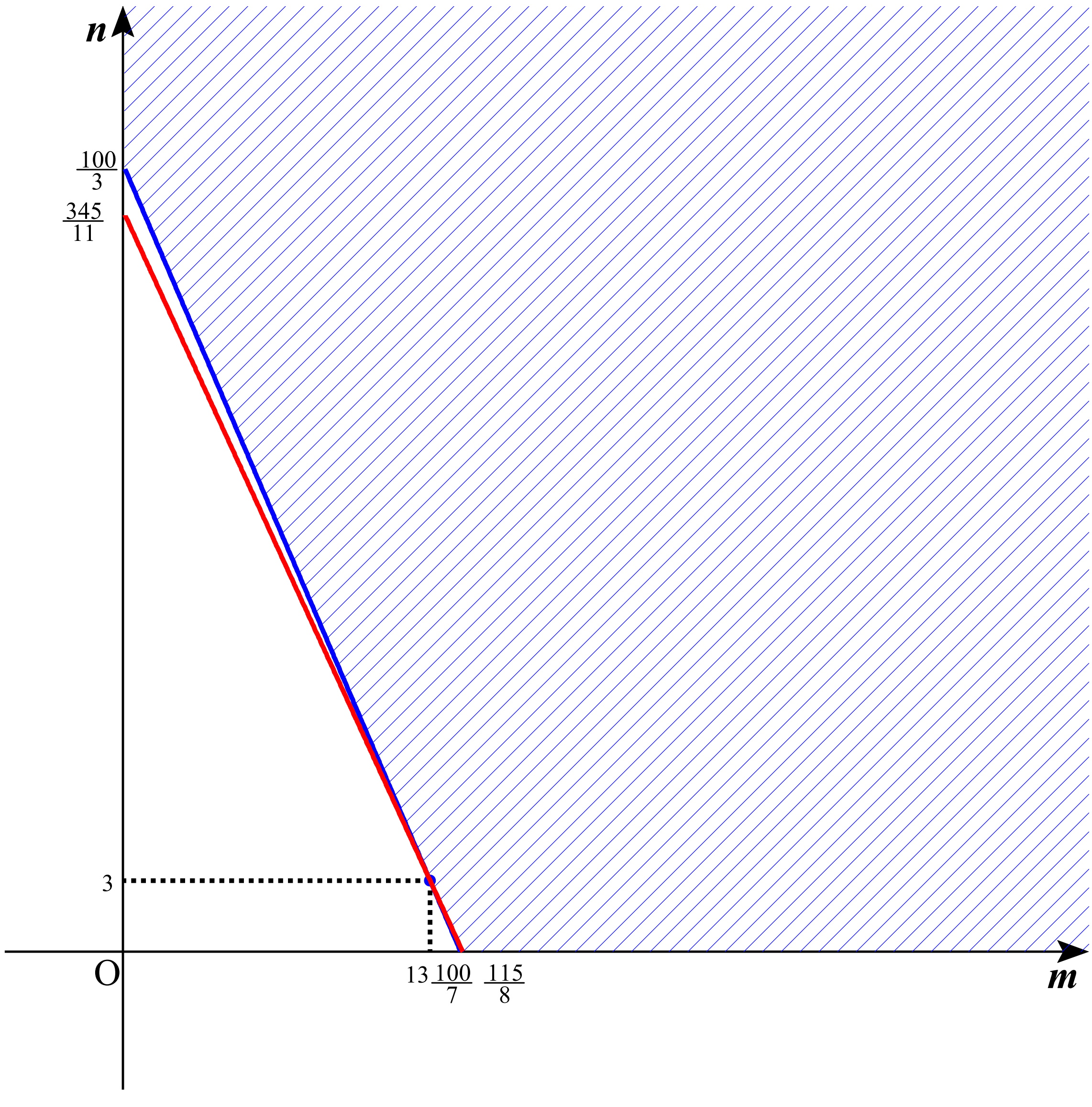
から，$m=14$のときが考えられる。

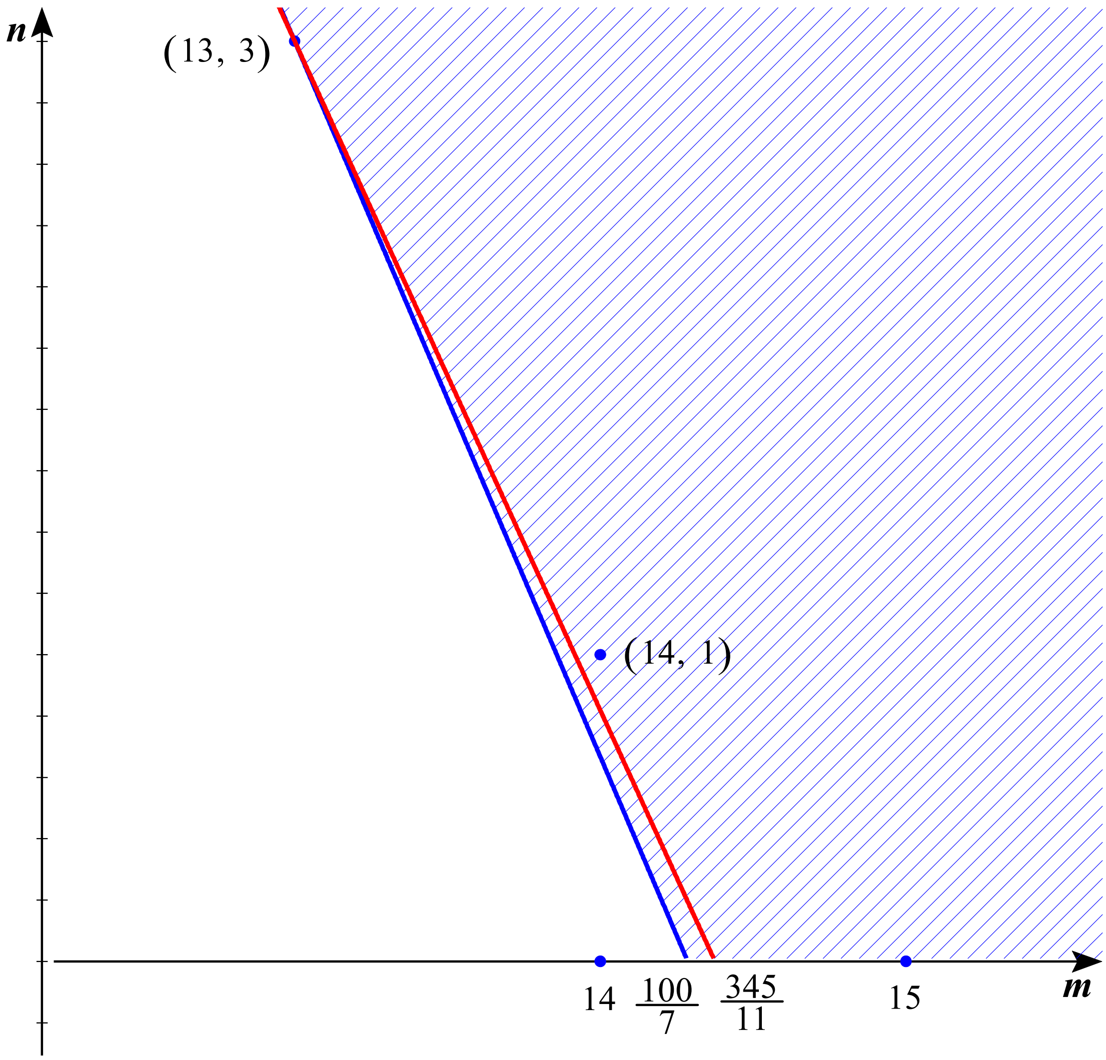
このとき，格子点が存在するならば，⑤と⑦より，

整数 n は $-\frac{7}{3}\cdot 14+\frac{100}{3}\leq n\leq -\frac{24}{11}\cdot 14+\frac{345}{11}$ を満たす。

ところが，これを計算すると $\frac{2}{3}\leq n\leq\frac{9}{11}$ となり，整数 n は存在しない。

よって，購入金額が最も低くなるのは，A,B をそれぞれ 13 セット，3 セットずつ購入するときで，その購入金額は，⑥より，6900 円である。




n
(13, 3)
(14, 1)
14
100
7
345
11
15
m

211

(1)

$x^2+y^2\leq 1$ および $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=s^2-2t$ より，$s^2-2t\leq 1$

$\therefore t\geq \dfrac{s^2}{2}-\dfrac{1}{2}$ ・・・①

$x,\ y$ は p の 2 次方程式 $p^2-(x+y)+xy=0$ すなわち $p^2-sp+t=0$ の実数解だから，
判別式を D とすると，実数解条件より，$D\geq 0$

これと $D=s^2-4t$ より，$s^2-4t\geq 0$ $\therefore t\leq \dfrac{s^2}{4}$ ・・・②

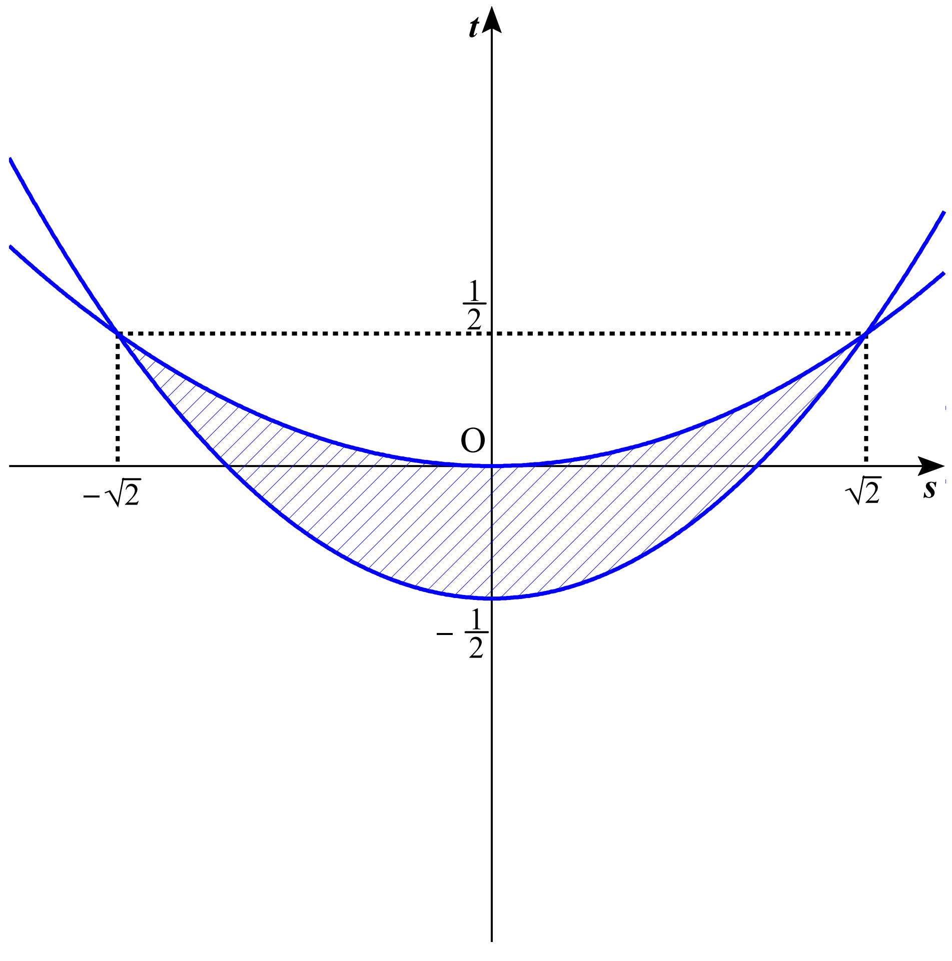
よって，点 $(s,\ t)$ は①かつ②を満たす領域を動く。

尚，①の境界線と②の境界線の共有点の座標については，

その s の値は $\dfrac{s^2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{s^2}{4}$ すなわち $\dfrac{1}{4}(s^2-2)=0$ を満たすことから，$s^2=2$ より，$s=\pm\sqrt{2}$

よって，共有点の座標は $(s,\ t)=\left(s,\ \dfrac{s^2}{4}\right)=\left(\pm\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

ゆえに，点 $(s,\ t)$ が動く領域は下図斜線部およびその境界線である。



(2)

$xy+m(x+y)=k$ とおくと，$t+ms=k$ より，$t=-ms+k$　・・・③

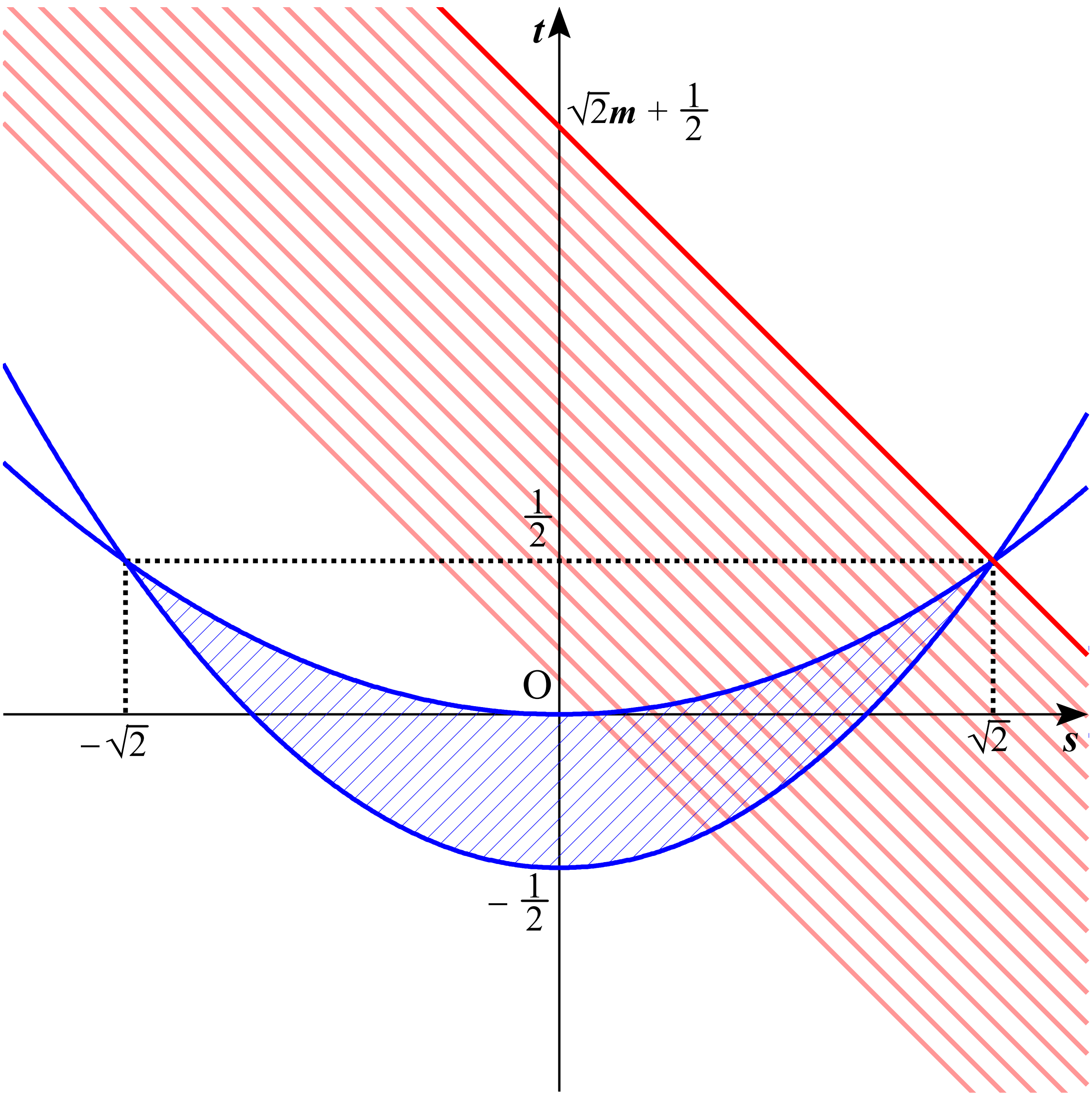
したがって，直線③が(1)で図示した領域と共有点をもつときの切片 k の最大値と最小値を求めればよい。

ただし，条件より $m\geq 0$ だから，直線③の傾き $-m\leq 0$ である。

(i) k の最大値

下図より，k が最大となるのは，直線③が $(s,\ t)=\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るときである。

よって，$\dfrac{1}{2}=-m\cdot\sqrt{2}+k$ より，$k=\sqrt{2}m+\dfrac{1}{2}$



(ii)　k の最小値

まず，③と①の境界線が接する場合について

$-ms+k=\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2}\left(s^2+2ms-2k-1\right)=0$ より，$s^2+2ms-2k-1=0$

判別式を D とすると，$D=0$

これと，$\frac{D}{4}=m^2+2k+1$ より，$m^2+2k+1=0$　$\therefore k=-\frac{m^2+1}{2}$

重解を α とすると，解と係数の関係より，$2\alpha=-2m$　$\therefore \alpha=-m$

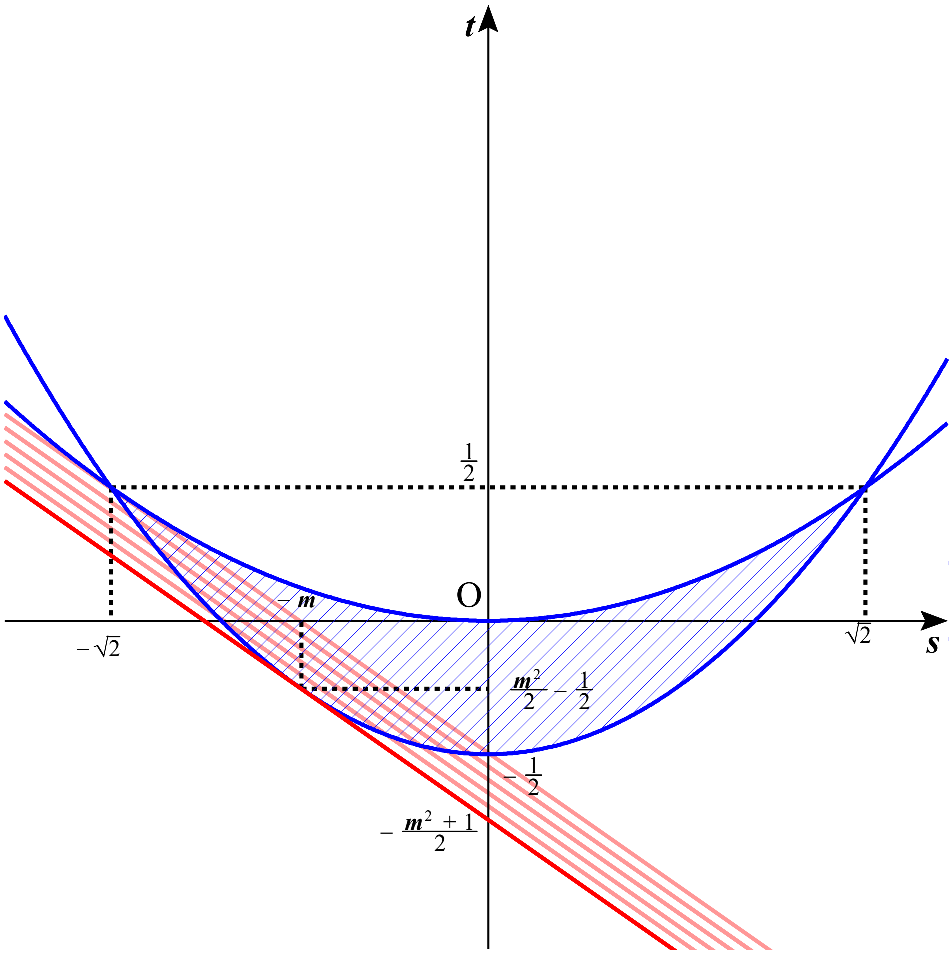
よって，③は①の境界線と点 $(s,\ t)=\left(s,\ \frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\left(-m,\ \frac{m^2}{2}-\frac{1}{2}\right)$ で接し，

このとき，$k=-\frac{m^2+1}{2}$ である。

(ii-1)　$-\sqrt{2}\leq -m\leq 0$ すなわち $0\leq m\leq\sqrt{2}$ のとき

　下図および上で述べた結果より，k が最小となるのは，

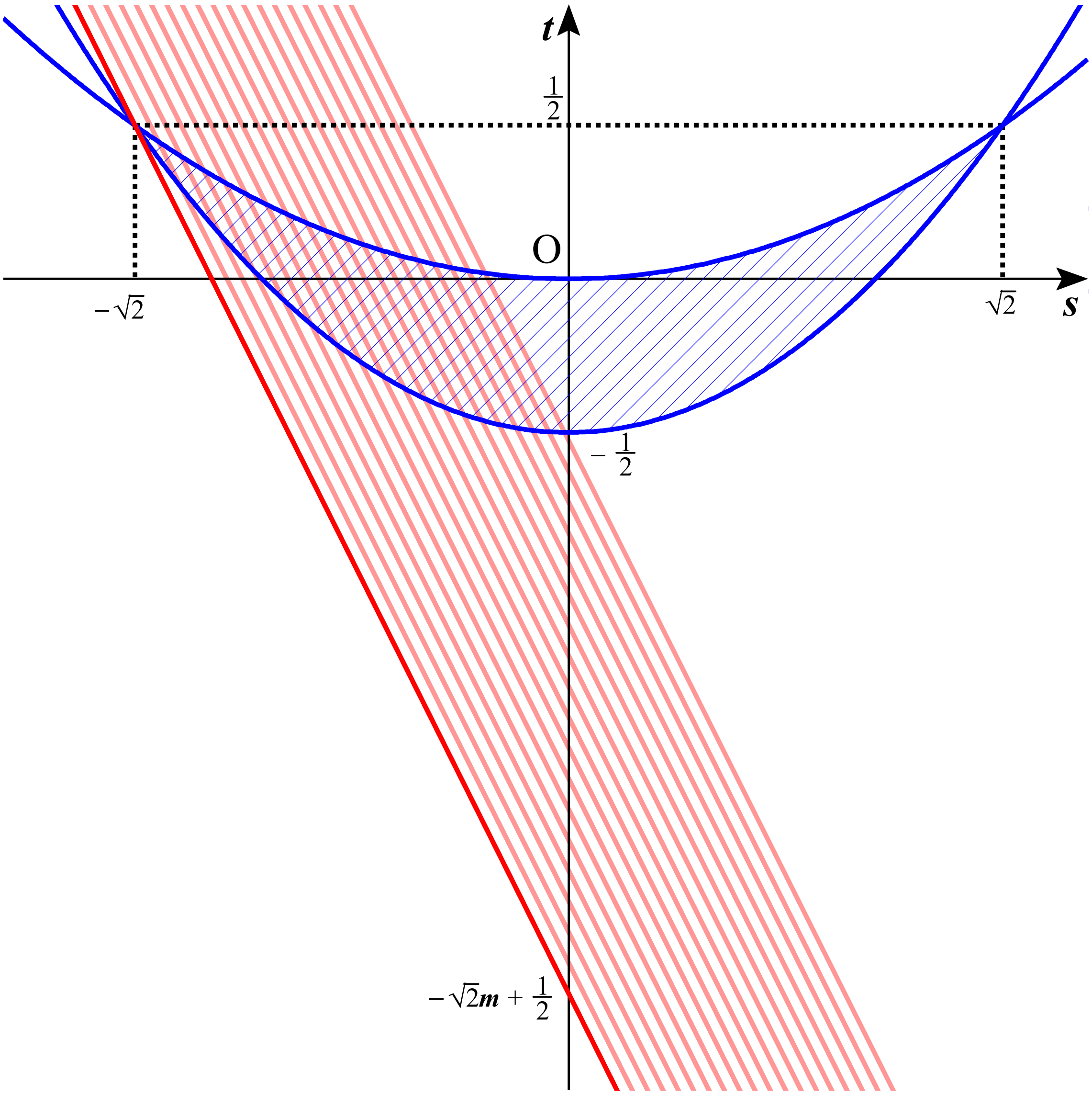
　③が $(s,\ t)=\left(-m,\ \frac{m^2}{2}-\frac{1}{2}\right)$ を通るとき k は最小値 $-\frac{m^2+1}{2}$ をとる。



(ii-2) $-m<-\sqrt{2}$ すなわち $m>\sqrt{2}$ のとき

下図より，k が最小となるのは，③が $(s,\ t)=\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るときである。

よって，$\dfrac{1}{2}=-m\cdot\left(-\sqrt{2}\right)+k$ より，$k=-\sqrt{2}m+\dfrac{1}{2}$



以上より,

最大値：$\sqrt{2}m+\dfrac{1}{2}$

最小値：$0 \leq m \leq \sqrt{2}$ のとき $-\dfrac{m^2+1}{2}$， $m>\sqrt{2}$ のとき $-\sqrt{2}m+\dfrac{1}{2}$